

Marcin Kurczab  
Elżbieta Kurczab  
Elżbieta Świda  
Tomasz Szwed

# **Matematyka. Solidnie od podstaw**

**Program nauczania w liceach i w technikach  
Zakres podstawowy**



Warszawa 2019 r.

## Spis treści

<b>I. Wstęp .....</b>	<b>3</b>
<b>II. Ogólne cele edukacyjne i wychowawcze .....</b>	<b>4</b>
<b>III. Ramowy rozkład materiału .....</b>	<b>5</b>
<b>IV. Treści kształcenia. Szczegółowe cele edukacyjne. Założone osiągnięcia uczniów .....</b>	<b>7</b>
<b>V. Procedury osiągania celów kształcenia i procedury oceniania osiągnięć uczniów .....</b>	<b>30</b>

## I. Wstęp

Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 30 stycznia 2018 r. w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz. U. z 2 marca 2018, poz. 467) w sposób istotny zmieniło podstawę programową kształcenia matematycznego w szkołach ponadpodstawowych. Podstawa ta zawiera precyzyjnie opisane wymagania, a dzięki temu także zakres treści programowych i umiejętności oczekiwanych od uczniów na zakończenie kolejnego etapu kształcenia. Znany jest zatem cel kształcenia i treści nauczania. Na pytanie „Jak osiągnąć założone cele?” odpowiada niniejszy program nauczania matematyki w szkołach ponadpodstawowych, w którym znajdują się informacje o sposobie organizacji procesu nauczania.

O dopuszczeniu programu nauczania w danej szkole decyduje dyrektor szkoły, po zasięgnięciu opinii rady pedagogicznej (Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 8 czerwca 2009 r. w sprawie dopuszczenia do użytku w szkole programów wychowania przedszkolnego i programów nauczania oraz dopuszczenia do użytku szkolnego podręczników, Dz. U. Nr 89, poz. 730). Nauczyciel może zaproponować program własny, program opracowany przez innych autorów, albo program opracowany przez innych autorów wraz z dokonanymi zmianami. Zaproponowany przez nauczyciela program powinien być dostosowany do potrzeb i możliwości uczniów, dla których jest przeznaczony. Realizacja naszego programu:

- umożliwia zdobycie wiadomości i umiejętności opisanych w podstawie programowej i w standardach wymagań egzaminacyjnych, w tym m.in. umiejętności:
  - budowania modeli matematycznych zjawisk z różnych dziedzin życia i ich stosowania;
  - wykorzystywania podstawowych narzędzi i technik matematycznych;
  - przeprowadzania prostego rozumowania dedukcyjnego;
  - zdobywania i krytycznego analizowania informacji, formułowania hipotez oraz ich weryfikacji;
- daje matematyczne podstawy do uczenia się przedmiotów przyrodniczych, przede wszystkim fizyki, chemii, biologii;
- zapewnia dużą efektywność kształcenia; program ma charakter spiralny, zdecydowana większość nowych zagadnień pojawia się w trakcie realizacji programu co najmniej dwukrotnie;
- umożliwia powtórzenie najważniejszych zagadnień występujących w podstawie programowej z matematyki na niższych etapach kształcenia.

Niektóre treści kształcenia i umiejętności zaproponowane przez nas nie występują w podstawie programowej dla zakresu podstawowego. Ich wprowadzenie było spowodowane tym, że ułatwiają zrozumienie zagadnień zapisanych w podstawie programowej (w standardach wymagań egzaminacyjnych) lub są związane z zagadnieniami z podstawy programowej, albo odgrywają istotną rolę w uczeniu się przedmiotów przyrodniczych. Należą do nich np. podstawowe pojęcia wprowadzające ucznia do matematyki, takie jak: definicja, twierdzenie, twierdzenie odwrotne, dowód wprost, dowód nie wprost, a także twierdzenie Talesa, czy też proste równania logarytmiczne, do rozwiązania których stosuje się definicję logarytmu. Ponieważ poważny problem stanowi niedostateczna sprawność uczniów w przekształcaniu wyrażeń algebraicznych, temu zagadnieniu poświęcona jest tematyka dotycząca działań na wyrażeniach takich jak wielomiany i ułamki algebraiczne. Decyzję o zakresie realizacji tych treści pozostawiamy nauczycielowi pracującemu z uczniami według naszego programu.

W programie przedstawiamy ogólne cele edukacyjne i wychowawcze, ramowy rozkład materiału, szczegółowe treści kształcenia wraz z zakresem przewidywanych osiągnięć ucznia. Omawiamy procedury osiągania celów kształcenia oraz procedury oceniania osiągnięć uczniów. Do realizacji tego

programu zalecamy serię podręczników i zbiorów zadań autorstwa Marcina Kurczaba, Elżbiety Kurczab, Elżbiety Świdry.

## II. Ogólne cele edukacyjne i wychowawcze

Matematyka to nauka rozwijająca się od czasów starożytności po czasy współczesne. Dostarcza narzędzi badań dla nauk przyrodniczych, technicznych, ekonomicznych i społecznych. Nic więc dziwnego, że jest jednym z głównych składników wykształcenia współczesnego człowieka. Matematyka stymuluje rozwój intelektualny młodego człowieka, pobudza jego aktywność umysłową, rozwija zdolności poznawcze, a także uczy dobrej organizacji pracy, wyrabia dociekliwość i krytycyzm. Rola nauczyciela polega na pokazywaniu uczniom, że umiejętności matematyczne są niezbędne do funkcjonowania człowieka, zarówno w rodzinie (np. planowanie wydatków), jak i w społeczeństwie (np. orientacja w systemie podatkowym i w budżecie państwa), czy w dziedzinie sztuki (np. kanon w rzeźbie i architekturze klasycznej).

Opracowany przez nas program ma służyć:

w zakresie rozwoju intelektualnego ucznia (cele związane z kształceniem)

- rozwijaniu umiejętności zdobywania, porządkowania, analizowania i przetwarzania informacji;
- opanowaniu umiejętności potrzebnych do oceny ilościowej i opisu zjawisk z różnych dziedzin życia;
- wykształceniu umiejętności budowania modeli matematycznych w odniesieniu do różnych sytuacji życiowych i stosowaniu metod matematycznych w rozwiązywaniu problemów praktycznych;
- rozwijaniu umiejętności czytania tekstu ze zrozumieniem;
- rozwinięciu wyobraźni przestrzennej;
- nabyciu umiejętności samodzielnego zdobywania wiedzy matematycznej;
- rozwijaniu zdolności i zainteresowań matematycznych;
- rozwijaniu pamięci;
- rozwijaniu logicznego myślenia;
- nabyciu umiejętności poprawnego analizowania, wnioskowania i uzasadniania;
- wykształceniu umiejętności operowania obiektami abstrakcyjnymi;
- precyzyjnemu formułowaniu wypowiedzi;
- pobudzeniu aktywności umysłowej uczniów;

w zakresie kształtowania postaw (cele związane z wychowaniem)

- kształtowaniu wytrwałości w zdobywaniu wiedzy i umiejętności matematycznych;
- wyrabianiu systematyczności w pracy;
- motywowaniu uczniów do kreatywności i samodzielności;
- kształtowaniu postaw dociekliwych, poszukujących i krytycznych;
- nabyciu umiejętności dobrej organizacji pracy, właściwego planowania nauki;
- kształtowaniu odpowiedzialności za powierzone zadania;
- kształtowaniu pozytywnych postaw etycznych (pomoc koleżeńska uczniom mniej zdolnym, piętnowanie nieuczciwości wyrażającej się w ściąganiu, podpowiadaniu itp.);
- rozwijaniu umiejętności pracy w zespole;
- kształtowaniu postawy dialogu i kultury dyskusji (komunikacja);
- dbaniu o estetykę (czytelny rysunek, jasne i przejrzyste rozwiązywanie zadań itp.).

### III. Ramowy rozkład materiału

W liceum i technikum na nauczanie matematyki przeznaczona jest łącznie 14 godzin tygodniowo. W liceum – w czteroletnim cyklu kształcenia – w każdej klasie tygodniowa liczba godzin matematyki wynosi odpowiednio: 3, 4, 3, 4. Dodatkowa godzina może być przydzielona decyzją dyrektora szkoły w dowolnej klasie. Dodatkowa godzina w klasie pierwszej służyłaby uzupełnieniu i ugruntowaniu wiedzy uczniów w zakresie podstaw algebry, geometrii i własności funkcji; od tego zależy skuteczne nauczanie w klasie drugiej i trzeciej. W konsekwencji uczeń będzie lepiej przygotowany do egzaminu maturalnego i do dalszego kształcenia na studiach. W technikum – w pięcioletnim cyklu kształcenia – proponujemy następujący podział godzin: klasa I – 2 godziny, klasa II – 3 godziny, klasa III – 3 godziny, klasa IV – 3 godziny, klasa V – 3 godziny. Przedstawiony poniżej ramowy rozkład materiału uwzględnia po 3 lub 4 godziny matematyki tygodniowo w każdej klasie.

#### Rozkład treści nauczania

Planujemy 4 części podręcznika dla zakresu podstawowego.

##### Klasa I

Zakres PODSTAWOWY (35 tyg. x 3 h = 105 h)		
l.p.	Dział	l. godz.
1	Zbiory liczbowe. Liczby rzeczywiste	14
2	Wyrażenia algebraiczne	19
3	Funkcje i ich własności	11
4	Funkcja liniowa	9
5	Układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi	10
6	Podstawowe własności wybranych funkcji	8
7	Geometria płaska – pojęcia wstępne. Trójkąty	17
8	Trygonometria kąta ostrego	7
9	Godziny do dyspozycji nauczyciela	10

##### Klasa II

Zakres PODSTAWOWY (35 tyg. x 4 h = 140 h)		
l.p.	Dział	l. godz.
1	Przekształcenia wykresów funkcji	10
2	Równania i nierówności z wartością bezwzględną	9
3	Funkcja kwadratowa	22
4	Geometria płaska – okręgi i koła	13
5	Trygonometria	17
6	Geometria płaska. Pole koła, pole trójkąta	13
7	Geometria analityczna	13
8	Wielomiany	26
9	Godziny do dyspozycji nauczyciela	17

**Klasa III**

Zakres PODSTAWOWY (35 tyg. x 3 h = 105 h)		
l.p.	Dział	l. godz.
1	Ułamki algebraiczne. Równania wymierne	14
2	Ciągi liczbowe	18
3	Geometria płaska – czworokąty	12
4	Geometria płask – pole czworokąta	15
5	Geometria analityczna	19
6	Elementy kombinatoryki	11
7	Godziny do dyspozycji nauczyciela	16

**Klasa IV**

Zakres PODSTAWOWY (27 tyg. x 4 h = 108 h)		
l.p.	Dział	l. godz.
1	Funkcja wykładnicza. Funkcja logarytmiczna	16
2	Rachunek prawdopodobieństwa. Elementy statystyki opisowej	23
3	Geometria przestrzenna – wielościany	22
4	Geometria przestrzenna – bryły obrotowe	14
5	Powtórzenie wiadomości	33

Godziny do dyspozycji nauczyciela mogą być przeznaczone na uzupełnienie wiadomości uczniów, omówienie dodatkowych zagadnień, a także (w klasie czwartej) na powtórzenie wiadomości i rozwiązywanie próbnych arkuszy maturalnych.

## IV. Treści kształcenia. Szczegółowe cele edukacyjne. Założone osiągnięcia uczniów

### Szczegółowy rozkład treści nauczania

#### Klasa I

##### **1. Zbiory liczbowe. Liczby rzeczywiste**

Zbiory liczbowe. Oś liczbową. Prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych. Przedziały. Zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb całkowitych. Równania z jedną niewiadomą. Rozwiązywanie równań metodą równań równoważnych. Nierówności z jedną niewiadomą. Rozwiązywanie nierówności metodą nierówności równoważnych. Procenty. Punkty procentowe. Przybliżenia, błąd bezwzględny i błąd względny, szacowanie.

##### **2. Wyrażenia algebraiczne**

Potęga o wykładniku naturalnym. Pierwiastek arytmetyczny. Pierwiastek stopnia nieparzystego z liczby ujemnej. Działania na wyrażeniach algebraicznych. Wzory skróconego mnożenia stopnia 2. Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym. Potęga o wykładniku wymiernym. Potęga o wykładniku rzeczywistym. Logarytm. Zastosowanie logarytmu. Zdanie. Zaprzeczenie zdania. Zdanie złożone. Zaprzeczenia zdań złożonych. Definicja. Twierdzenie. Dowód twierdzenia. Przekształcanie wzorów. Średnie.

##### **3. Funkcja i jej własności**

Pojęcie funkcji. Funkcja liczbową. Sposoby opisywania funkcji. Wykres funkcji. Dziedzina funkcji liczbowej. Zbiór wartości funkcji liczbowej. Najmniejsza i największa wartość funkcji. Miejsce zerowe funkcji. Monotoniczność funkcji. Funkcje różnowartościowe. Odczytywanie własności funkcji na podstawie jej wykresu. Zastosowanie wiadomości o funkcjach do opisywania, interpretowania i przetwarzania informacji wyrażonych w postaci funkcji

##### **4. Funkcja liniowa**

Proporcjonalność prosta. Funkcja liniowa. Wykres i miejsca zerowe funkcji liniowej. Znaczenie współczynnika kierunkowego we wzorze funkcji liniowej. Zastosowanie własności funkcji liniowej w zadaniach praktycznych.

##### **5. Układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi**

Równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. Układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi. Graficzne rozwiązywanie układów równań. Rozwiązywanie układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania. Rozwiązywanie układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi metodą przeciwnych współczynników. Zastosowanie układów równań do rozwiązywania zadań.

##### **6. Podstawowe własności wybranych funkcji**

Funkcja kwadratowa. Proporcjonalność odwrotna. Funkcja wykładnicza. Funkcja logarytmiczna.

## 7. Geometria płaska – pojęcia wstępne. Trójkąty

Punkt, prosta, odcinek, półprosta, kąt, figura wypukła, figura ograniczona. Wzajemne położenie prostych na płaszczyźnie, odległość punktu od prostej, odległość między prostymi równoległymi, symetralna odcinka, dwusieczna kąta. Dwie proste przecięte trzecią prostą. Suma kątów w trójkącie. Wielokąt. Wielokąt foremny. Suma kątów w wielokącie. Twierdzenie Talesa. Podział trójkątów. Nierówność trójkąta. Odcinek łączący środki boków w trójkącie. Twierdzenie Pitagorasa. Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa. Wysokości w trójkącie. Środkowe w trójkącie. Przystawanie trójkątów. Podobieństwo trójkątów.

## 8. Trygonometria kąta ostrego

Określenie sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa w trójkącie prostokątnym. Wartości sinusa, cosinusa, tangensa i cotangensa kątów  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $60^\circ$ . Zależności między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego

## Klasa II

### 1. Przekształcenia wykresów funkcji

Przesunięcie równoległe wykresu funkcji wzdłuż osi OY. Przesunięcie równoległe wykresu funkcji wzdłuż osi OX. Symetria osiowa względem osi OX. Symetria osiowa względem osi OY. Symetria środkowa względem punktu  $(0, 0)$ .

### 2. Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Wartość bezwzględna. Równania z wartością bezwzględną. Nierówności z wartością bezwzględną.

### 3. Funkcja kwadratowa

Przypomnienie wiadomości o funkcji kwadratowej z klasy I. Przesunięcie równoległe wykresu funkcji kwadratowej  $y = ax^2$ . Związek między wzorem funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, a wzorem funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej. Miejsca zerowe funkcji kwadratowej. Wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej. Szkicowanie wykresów funkcji kwadratowych. Odczytywanie własności funkcji kwadratowej na podstawie wykresu. Wyznaczanie wzoru funkcji kwadratowej na podstawie podanych własności. Najmniejsza oraz największa wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym. Badanie funkcji kwadratowej - zadania optymalizacyjne. Równania kwadratowe. Równania prowadzące do równań kwadratowych (w tym równania dwukwadratowe). Nierówności kwadratowe. Zadania prowadzące do równań i nierówności kwadratowych (w tym zadania na układ równań typu: równanie liniowe i równanie kwadratowe).

### 4. Geometria płaska – okręgi i koła

Okręgi i koła. Kąty i koła. Okrąg opisany na trójkącie. Okrąg wpisany w trójkąt. Twierdzenie o stycznej i siecznej.

### 5. Trygonometria

Przypomnienie i uzupełnienie wiadomości dotyczących trygonometrii kąta ostrego. Sinus, cosinus, tangens i cotangens dowolnego kąta (do  $360^\circ$ ). Wzory redukcyjne. Podstawowe tożsamości trygonometryczne. Twierdzenie sinusów. Twierdzenie cosinusów. Rozwiązywanie trójkątów.



## 6. Geometria płaska. Pole koła, pole trójkąta

Pole figury geometrycznej. Pole trójkąta. Pola trójkątów podobnych. Pole koła, pole wycinka koła. Zastosowanie pojęcia pola w dowodzeniu twierdzeń.

## 7. Geometria analityczna

Odcinek w układzie współrzędnych (długość, środek). Prosta w układzie współrzędnych. Równanie kierunkowe prostej i równanie ogólne prostej. Prostopadłość i równoległość prostych w układzie współrzędnych. Odległość punktu od prostej. Układ równań z dwiema niewiadomymi, z których jedno jest pierwszego stopnia, a drugie typu  $y = ax^2 + bx + c$ . Zastosowanie poznanych układów równań w rozwiązywaniu zadań.

## 8. Wielomiany

Wielomian jednej zmiennej. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie wielomianów. Wzory skróconego mnożenia stopnia 3. Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia w działaniach na wielomianach. Równość wielomianów. Podzielność wielomianów. Dzielenie wielomianu. Dzielenie wielomianu z resztą. Dzielenie wielomianu przez dwumian liniowy za pomocą schematu Hornera. Wzór  $a^n - b^n$ . Pierwiastek wielomianu. Twierdzenie Bezouta. Pierwiastek wielomianu o współczynnikach całkowitych. Rozkładanie wielomianów na czynniki. Równania wielomianowe (w tym równania dwukwadratowe). Zadania prowadzące do równań wielomianowych.

## Klasa III

### 1. Ułamki algebraiczne. Równania wymierne

Ułamek algebraiczny. Skracanie i rozszerzanie ułamków algebraicznych. Dodawanie i odejmowanie ułamków algebraicznych. Mnożenie i dzielenie ułamków algebraicznych. Równania wymierne. Zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych. Funkcja homograficzna.

### 2. Ciągi liczbowe

Określenie ciągu. Sposoby opisywania ciągów (w tym ciągi określone rekurencyjnie). Monotoniczność ciągu. Ciąg arytmetyczny. Suma początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Ciąg geometryczny. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. Lokaty pieniężne i kredyty bankowe. Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny – zadania różne.

### 3. Geometria płaska – czworokąty

Podział czworokątów. Trapezoidy. Trapezy. Równoległoboki. Wielokąty. Wielokąt foremny. Podobieństwo. Figury podobne. Podobieństwo czworokątów.

### 4. Geometria płaska – pole czworokąta

Pole prostokąta. Pole kwadratu. Pole równoległoboku. Pole rombu. Pole trapezu. Pole czworokąta – zadania różne (pole wielokąta). Pola figur podobnych. Mapa. Skala mapy.

### 5. Geometria analityczna

Powtórzenie i uzupełnienie wiadomości z klasy drugiej. Równanie okręgu. Wzajemne położenie prostej i okręgu. Styczna do okręgu. Rozwiązywanie zadań dotyczących wielokątów w układzie współ-

rzędnych. Wyznaczanie obrazów okręgów i wielokątów w symetriach osiowych względem osi układu współrzędnych i w symetrii środkowej względem punktu  $O(0, 0)$ .

## 6. Elementy kombinatoryki

Reguła mnożenia. Reguła dodawania. Zadania kombinatoryczne.

### Klasa IV

#### 1. Funkcja wykładnicza. Funkcja logarytmiczna

Potęga o wykładniku rzeczywistym – powtórzenie. Funkcja wykładnicza i jej własności. Równania wykładnicze. Nierówności wykładnicze. Zastosowanie funkcji wykładniczej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym. Logarytm – powtórzenie wiadomości. Funkcja logarytmiczna i jej własności. Równania logarytmiczne. Zastosowanie logarytmów i wykresu funkcji logarytmicznej do rozwiązywania zadań umieszczonych w kontekście praktycznym.

#### 2. Rachunek prawdopodobieństwa. Elementy statystyki opisowej

Zadania z kombinatoryki – powtórzenie wiadomości. Działania na zbiorach – powtórzenie wiadomości. Doświadczenie losowe. Zdarzenia. Działania na zdarzeniach. Obliczanie prawdopodobieństwa. Zmienna losowa. Rozkład zmiennej losowej. Wartość oczekiwana zmiennej losowej. Podstawowe pojęcia statystyki. Sposoby prezentowania danych w wyniku obserwacji statystycznej. Średnia z próby. Mediana z próby i moda z próby. Wariancja i odchylenie standardowe.

#### 3. Geometria przestrzenna – wielościany

Płaszczyzny i proste w przestrzeni. Rzut równoległy na płaszczyznę. Rysowanie figur płaskich w rzucie równoległym na płaszczyznę. Prostopadłość prostych i płaszczyzn w przestrzeni. Rzut prostokątny na płaszczyznę. Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych. Kąt między prostą a płaszczyzną. Kąt dwuścienny. Graniastosłupy. Ostrosłupy. Siatka wielościanu. Pole powierzchni wielościanu. Objętość figury przestrzennej. Objętość wielościanów. Przekroje wybranych wielościanów. Wielościany podobne. Objętość wielościanów podobnych.

#### 4. Geometria przestrzenna – bryły obrotowe

Walec. Pole powierzchni walca. Objętość walca. Stożek. Pole powierzchni stożka. Objętość stożka. Kula i sfera. Bryły obrotowe podobne. Objętość brył obrotowych podobnych. Bryły obrotowe – zadania różne.

#### 5. Powtórzenie wiadomości

## Klasa I

### 1. Zbiory. Liczby rzeczywiste (14 godzin)

#### Cele edukacyjne

#### Uczeń:

- pozna takie pojęcia, jak: zbiór pusty, zbiór skończony (nieskończony), element zbioru, równość zbiorów, zbiory rozłączne, dopełnienie zbioru;
- zapozna się z symboliką matematyczną dotyczącą zbiorów ( $\in$ ,  $\subset$ ,  $\cap$ ,  $\cup$ ,  $-$ ,  $'$ );
- pozna pojęcie sumy, różnicy, iloczynu i dopełnienia zbiorów;
- przypomni sobie wiadomości dotyczące liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych i niewymiernych;
- pozna relacje, jakie zachodzą między podzbiarami zbioru liczb rzeczywistych;
- przypomni sobie, czym jest oś liczbowa;
- pozna pojęcie przedziału (ograniczonego, nieograniczonego, otwartego, domkniętego, jednostronnie otwartego);
- nauczy się wykonywać działania na przedziałach (znajdować ich sumę, iloczyn oraz różnicę, a także dopełnienie przedziału);
- przypomni sobie własności równości i nierówności w zbiorze  $R$ ;
- przypomni sobie podstawowe wiadomości o równaniach;
- nauczy się rozwiązywać nierówności;
- pozna pojęcie liczby pierwszej i złożonej;
- pozna cechy podzielności liczb naturalnych oraz jak znajduje się NWD i NWW liczb naturalnych;
- przypomni sobie, jak wykonuje się działania na ułamkach;
- przypomni sobie prawa działań w zbiorze liczb rzeczywistych;
- pozna twierdzenia pozwalające przekształcać w sposób równoważny równania i nierówności;
- przypomni sobie pojęcie procentu i nauczy się sprawnie operować procentami;
- pozna pojęcie punktu procentowego;
- przypomni sobie pojęcie wartości bezwzględnej;
- pozna pojęcie błędu bezwzględnego i względnego;
- nauczy się szacować wyrażenia liczbowe.

#### Założone osiągnięcia ucznia

#### Uczeń potrafi:

- wyznaczać część wspólną, sumę i różnicę zbiorów oraz dopełnienie zbioru;
- wskazać w podanym zbiorze liczby naturalne, całkowite, wymierne, niewymierne;
- posługiwać się pojęciem osi liczbowej;
- zaznaczać przedziały na osi liczbowej;
- wykonywać działania na przedziałach;
- stosować własności równości i nierówności w zbiorze  $R$  oraz rozwiązywać proste równania i nierówności;
- zaznaczać zbiór rozwiązań nierówności na osi liczbowej;
- stosować cechy podzielności liczb naturalnych do znajdowania NWW i NWD (w tym również w celu rozwiązania zagadnień praktycznych);

- sprawnie wykonywać działania na ułamkach;
- zaplanować i wykonać obliczenia na liczbach rzeczywistych (w tym z wykorzystaniem praw działań);
- stwierdzić, czy wynik obliczeń jest liczbą wymierną czy niewymierną;
- wyznaczać rozwinięcia dziesiętne liczb;
- zapisać liczbę wymierną (w tym mającą rozwinięcie dziesiętne okresowe) w postaci ilorazu liczb całkowitych;
- stosować twierdzenia pozwalające przekształcać w sposób równoważny równania i nierówności;
- stosować pojęcie procentu w obliczeniach;
- odczytywać dane z tabel i diagramów;
- wykorzystywać tabele i diagramy do przedstawiania danych;
- posługiwać się pojęciem punktu procentowego;
- obliczyć wartość bezwzględną danej liczby;
- znaleźć przybliżenie liczby z zadaną dokładnością;
- stosować reguły zaokrąglania liczb;
- stosować pojęcie błędu bezwzględnego i błędu względnego przybliżenia;
- oszacować wartość wyrażenia liczbowego.

## 2. Wyrażenia algebraiczne (19 godzin)

### Cele edukacyjne

#### Uczeń:

- przypomni sobie własności działań na potęgach o wykładniku naturalnym;
- przypomni sobie prawa działań na pierwiastkach arytmetycznych;
- pozna pojęcie pierwiastka stopnia nieparzystego z liczby ujemnej;
- przypomni sobie działania na wyrażeniach algebraicznych;
- pozna wzory skróconego mnożenia:  $(a + b)^2$ ,  $(a - b)^2$ ,  $a^2 - b^2$ ;
- nauczy się rozkładać wyrażenia algebraiczne na czynniki za pomocą poznanych wzorów skróconego mnożenia;
- nauczy się usuwać niewymierność z mianownika lub licznika ułamka;
- przypomni sobie własności działań na potęgach o wykładniku całkowitym;
- przypomni sobie zapis liczby w notacji wykładniczej;
- pozna pojęcie potęgi o wykładniku wymiernym i własności działań na takich potęgach;
- pozna, jak konstruuje się potęgę o wykładniku niewymiernym;
- pozna prawa działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym;
- pozna pojęcie dowodu wprost oraz dowodu nie wprost;
- pozna określenie logarytmu;
- pozna podstawowe własności logarytmu (wzór na logarytm ilorazu, iloczynu, potęgi);
- pozna wzór na zamianę podstaw logarytmu;
- pozna przykładowe zastosowania logarytmów;
- pozna zdania proste i złożone;
- pozna spójniki logiczne;
- pozna kwantyfikator ogólny i szczegółowy oraz nauczy się zaprzeczać zdania z kwantyfikatorem;

- dowie się, co to jest definicja i czym różni się od twierdzenia;
- dowie się, co to jest twierdzenie odwrotne;
- pozna podstawowe prawa logiki, takie jak negacja alternatywy i negacja koniunkcji;
- nauczy się przekształcać wzory stosowane w matematyce, fizyce, chemii;
- przypomni sobie pojęcie średniej arytmetycznej oraz pozna pojęcie średniej geometrycznej, średniej ważonej i średniej harmonicznej.

### Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- sprawnie wykonywać działania na potęgach o wykładniku naturalnym i całkowitym, stosując odpowiednie prawa;
- zapisywać liczby w postaci wykładniczej  $a \cdot 10^k$ , gdzie  $a \in (1, 10)$  i  $k \in \mathbf{C}$ ;
- sprawnie wykonywać działania na pierwiastkach, stosując odpowiednie prawa;
- posługiwać się wzorami skróconego mnożenia (w tym do rozkładania sum algebraicznych na czynniki);
- usuwać niewymierność z mianownika lub licznika ułamka;
- wykonywać działania na potęgach o wykładniku rzeczywistym (wymiernym i niewymiernym), stosując odpowiednie prawa;
- obliczyć logarytm danej liczby przy danej podstawie;
- stosować w obliczeniach podstawowe własności logarytmu;
- znaleźć przybliżenie liczby zapisanej przy użyciu potęgi i przedstawić je (używając kalkulatora) w notacji wykładniczej;
- odróżnić zdanie logiczne od innej wypowiedzi i ocenić jego wartość logiczną;
- posługiwać się spójnikami logicznymi i wie, że potoczne rozumienie spójników „i” oraz „lub” może być inne niż znaczenie spójników logicznych „ $\wedge$ ”, „ $\vee$ ”;
- zaprzeczać zdanie;
- budować zdania złożone i oceniać ich wartość logiczną;
- odróżniać definicję od twierdzenia;
- mając dane twierdzenie w postaci implikacji, zbudować twierdzenie odwrotne do danego twierdzenia;
- stosować określenia „dla każdego”, „dla pewnego”, „istnieje”, „dla dowolnego”;
- stosować poznane prawa logiczne;
- dowodzić twierdzenia, posługując się dowodem wprost;
- dowodzić twierdzenia, posługując się dowodem nie wprost;
- sprawnie przekształcać wzory stosowane w matematyce, fizyce, chemii;
- obliczać średnią arytmetyczną, geometryczną, ważoną i harmoniczną.

### **3. Funkcje i ich własności (11 godzin)**

#### Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna pojęcie funkcji;
- pozna różne sposoby opisywania funkcji (graf, wzór, tabela, wykres, opis słowny);
- pozna takie pojęcia, jak: dziedzina, zbiór wartości, miejsce zerowe funkcji liczbowej;
- pozna pojęcie monotoniczności funkcji;

- pozna pojęcie różnowartościowości funkcji;
- pozna pojęcie najmniejszej i największej wartości funkcji;
- nauczy się odczytywać własności funkcji na podstawie jej wykresu;
- nauczy się opisywać, interpretować i przetwarzać informacje wyrażone w postaci wzoru lub wykresu funkcji.

#### Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- odróżnić przyporządkowanie, które jest funkcją, od przyporządkowania, które funkcją nie jest;
- opisywać funkcje na różne sposoby (grafem, wzorem, tabelką, wykresem, opisem słownym);
- wskazać wykres funkcji liczbowej;
- wyznaczyć dziedzinę funkcji liczbowej;
- określić zbiór wartości funkcji (proste przykłady);
- obliczyć ze wzoru funkcji jej wartość dla danego argumentu;
- obliczyć argument funkcji, gdy dana jest wartość funkcji dla tego argumentu;
- obliczyć miejsca zerowe funkcji;
- określić na podstawie wykresu funkcji: dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, wartość największą i najmniejszą funkcji, maksymalne przedziały, w których funkcja rośnie (maleje, jest stała) oraz zbiory, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie (ujemne);
- określić na podstawie wykresu, czy dana funkcja jest różnowartościowa;
- podać opis matematyczny zależności dwóch zmiennych w postaci funkcji;
- odczytywać i interpretować informacje na podstawie wykresów funkcji, dotyczące różnych zjawisk, np. przyrodniczych, ekonomicznych, socjologicznych, fizycznych, chemicznych;
- przetwarzać informacje wyrażone w postaci wzoru funkcji lub wykresu funkcji.

#### **4. Funkcja liniowa (9 godzin)**

##### Cele edukacyjne

Uczeń:

- przypomni sobie definicję proporcjonalności prostej;
- pozna definicję funkcji liniowej;
- pozna znaczenie współczynników we wzorze funkcji liniowej;
- nauczy się szkicować wykres funkcji liniowej;
- pozna własności funkcji liniowej;
- nauczy się stosować wiadomości o funkcji liniowej do opisu zjawisk z życia codziennego.

#### Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- wskazać wielkości wprost proporcjonalne oraz określić współczynnik proporcjonalności;
- zastosować proporcjonalność prostą w rozwiązywaniu zadań;
- sporządzić wykres funkcji liniowej i odczytać własności funkcji na podstawie jej wykresu;
- znaleźć wzór funkcji liniowej o zadanych własnościach;
- wykorzystać interpretację współczynników występujących we wzorze funkcji liniowej w rozwiązywaniu zadań;

- stosować pojęcie funkcji liniowej do opisywania zjawisk z życia codziennego.

## 5. Układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi (10 godzin)

### Cele edukacyjne

#### Uczeń:

- pozna pojęcie równania pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi;
- dowie się, czym jest układ równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi;
- pozna metodę graficzną rozwiązywania układów równań;
- pozna metodę podstawiania;
- pozna metodę przeciwnych współczynników;
- pozna zastosowanie układów równań w rozwiązywaniu zadań tekstowych.

### Założone osiągnięcia ucznia

#### Uczeń potrafi:

- rozwiązać układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi metodą graficzną, metodą podstawiania oraz metodą przeciwnych współczynników;
- stosować układy równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi do rozwiązywania zadań tekstowych.

## 6. Podstawowe własności wybranych funkcji (8 godzin)

### Cele edukacyjne

#### Uczeń:

- pozna definicję funkcji kwadratowej;
- nauczy się zapisywać wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej;
- nauczy się, na podstawie wzoru w postaci kanonicznej, szkicować wykres funkcji kwadratowej;
- nauczy się, na podstawie wykresu, odczytywać własności funkcji kwadratowej;
- nauczy się wyznaczać argument, dla którego funkcja kwadratowa przyjmuje daną wartość;
- pozna przykładowe zastosowania funkcji kwadratowej;
- pozna definicję proporcjonalności odwrotnej;
- pozna zastosowania proporcjonalności odwrotnej;
- nauczy się szkicować wykres proporcjonalności odwrotnej;
- pozna definicję, wykres i najważniejsze własności funkcji wykładniczej;
- pozna zastosowania funkcji wykładniczej;
- pozna definicję, wykres i najważniejsze własności funkcji logarytmicznej.

### Założone osiągnięcia ucznia

#### Uczeń potrafi:

- zapisać wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej;
- naszkicować wykres funkcji kwadratowej (na podstawie wzoru w postaci kanonicznej);
- odczytać z wykresu najważniejsze własności funkcji kwadratowej;
- wyznaczyć argument, dla którego funkcja kwadratowa przyjmuje daną wartość;
- zastosować funkcję kwadratową do rozwiązania prostych zadań;
- narysować wykres proporcjonalności odwrotnej;

- odczytać z wykresu najważniejsze własności proporcjonalności odwrotnej;
- zastosować proporcjonalność odwrotną do rozwiązywania prostych zadań;
- odczytać z wykresu funkcji wykładniczej jej podstawowe własności;
- odczytać z wykresu funkcji logarytmicznej jej podstawowe własności.

## 7. Geometria płaska – pojęcia wstępne. Trójkąty (17 godzin)

### Cele edukacyjne

#### Uczeń:

- przypomni sobie podstawowe pojęcia geometryczne (punkt, prosta, odcinek, półprosta, kąt);
- pozna pojęcie figury wklęsłej i wypukłej;
- pozna pojęcie figury ograniczonej i nieograniczonej;
- przypomni sobie wiadomości o kątach (kąt prosty, ostry, rozwarty, kąty przyległe, kąty wierzchołkowe);
- przypomni sobie położenie prostych na płaszczyźnie, pojęcie odległości punktu od prostej i pojęcie odległości między prostymi równoległymi;
- pozna pojęcie symetralnej odcinka i dwusiecznej kąta oraz jaką własność ma dowolny punkt leżący na symetralnej odcinka (dwusiecznej kąta);
- przypomni sobie twierdzenie o dwóch prostych równoległych, przeciętych trzecią prostą;
- przypomni sobie podział trójkątów ze względu na boki i kąty;
- przypomni sobie twierdzenie o sumie miar kątów w trójkącie;
- przypomni sobie, na czym polega nierówność trójkąta;
- pozna twierdzenie o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta;
- przypomni sobie twierdzenie Pitagorasa;
- pozna twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa;
- pozna twierdzenie Talesa;
- pozna twierdzenie o wysokościach w trójkącie;
- pozna twierdzenie o środkowych w trójkącie;
- przypomni sobie pojęcie trójkątów przystających oraz cechy przystawiania trójkątów;
- pozna pojęcie trójkątów podobnych oraz cechy podobieństwa trójkątów.

### Założone osiągnięcia ucznia

#### Uczeń potrafi:

- określać własności poznanych figur geometrycznych i posługiwać się tymi własnościami;
- wyznaczać odległość dwóch punktów, punktu od prostej, dwóch prostych równoległych;
- konstruować: proste prostopadłe, proste równoległe, symetralną odcinka, dwusieczną kąta;
- stosować poznane twierdzenia w rozwiązywaniu zadań (w tym m.in. twierdzenie o sumie kątów trójkąta, twierdzenie o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta, twierdzenie Pitagorasa, twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa, twierdzenie o wysokościach w trójkącie, twierdzenie o środkowych w trójkącie);
- określić – znając długości boków trójkąta – czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny;
- rozpoznawać trójkąty przystające;
- stosować cechy przystawiania trójkątów w rozwiązywaniu zadań;
- rozpoznawać trójkąty podobne;



- stosować cechy podobieństwa trójkątów w rozwiązywaniu zadań (w tym również umieszczone w kontekście praktycznym);
- stosować w rozwiązywaniu zadań poznane twierdzenia (m.in. twierdzenie o dwóch prostych przeciętych trzecią prostą, twierdzenie Talesa).

## 8. Trygonometria kąta ostrego (7 godzin)

### Cele edukacyjne

#### Uczeń:

- pozna określenie funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym;
- nauczy się obliczać wartości funkcji trygonometrycznych kątów  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ;
- pozna podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego;
- pozna wybrane wzory redukcyjne.

### Założone osiągnięcia ucznia

#### Uczeń potrafi:

- wyznaczyć funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym;
- korzystać z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora);
- obliczyć miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną);
- stosować podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego w rozwiązywaniu zadań;
- znając wartości jednej funkcji, potrafi wyznaczyć wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego samego kąta ostrego;
- stosować wybrane, najprostsze wzory redukcyjne w rozwiązywaniu zadań;
- zbudować kąt ostry, znając wartość jednej z funkcji trygonometrycznych tego kąta.

## Klasa II

### 1. Przekształcanie wykresów funkcji (10 godzin)

#### Cele edukacyjne

#### Uczeń:

- nauczy się przesuwać równolegle wykres funkcji wzdłuż osi  $OX$ ;
- nauczy się przesuwać równolegle wykres funkcji wzdłuż osi  $OY$ ;
- nauczy się przekształcać wykres funkcji przez symetrię względem osi  $OX$ ;
- nauczy się przekształcać wykres funkcji przez symetrię względem osi  $OY$ ;
- nauczy się przekształcać wykres funkcji przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych.

### Założone osiągnięcia ucznia

#### Uczeń potrafi:

- na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$  naszkicować wykres funkcji  $y = f(x + a)$ ;
- na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$  naszkicować wykres funkcji  $y = f(x) + b$ ;
- na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$  naszkicować wykres funkcji  $y = f(x + a) + b$ ;

- na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$  naszkicować wykres funkcji  $y = -f(x)$ ;
- na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$  naszkicować wykres funkcji  $y = f(-x)$ ;
- na podstawie wykresu funkcji  $y = f(x)$  naszkicować wykres funkcji  $y = -f(-x)$ .

## 2. Równania i nierówności z wartością bezwzględną (9 godzin)

### Cele edukacyjne

#### Uczeń:

- zastosuje interpretację geometryczną wartości bezwzględnej;
- zaznaczy na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu  $|x - a| = b$ ,  $|x - a| \geq b$ ;
- zapisze nierówność (równanie) z wartością bezwzględną, znając zbiór rozwiązań tej nierówności (tego równania).

### Założone osiągnięcia ucznia

#### Uczeń potrafi:

- zastosować interpretację geometryczną wartości bezwzględnej;
- zaznaczyć na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności typu  $|x - a| = b$ ,  $|x - a| \geq b$ ;
- zapisać nierówność (równanie) z wartością bezwzględną, znając zbiór rozwiązań tej nierówności (tego równania).

## 3. Funkcja kwadratowa (22 godziny)

### Cele edukacyjne

#### Uczeń:

- nauczy się przedstawiać wzór funkcji kwadratowej w postaci ogólnej, kanonicznej i iloczynowej;
- nauczy się szkicować wykresy funkcji kwadratowych o zadanych własnościach;
- nauczy się odczytywać własności funkcji kwadratowej na podstawie jej wykresu;
- nauczy się wyznaczać najmniejszą oraz największą wartość funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
- nauczy się stosować własności funkcji kwadratowej w zadaniach optymalizacyjnych;
- nauczy się rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe;
- nauczy się rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych.

### Założone osiągnięcia ucznia

#### Uczeń potrafi:

- odróżnić wzór funkcji kwadratowej od wzorów innych funkcji;
- sporządzić wykres funkcji kwadratowej i podać jej własności na podstawie wykresu;
- wyznaczać współrzędne wierzchołka paraboli i wzór funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej;
- przekształcać wykresy funkcji kwadratowych;
- wyznaczyć wzór ogólny funkcji kwadratowej o zadanych własnościach lub na podstawie jej wykresu;

- wyznaczyć miejsca zerowe funkcji kwadratowej i wzór funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej;
- sprawnie przekształcać wzór funkcji kwadratowej (z postaci ogólnej do postaci kanonicznej, z postaci iloczynowej do postaci kanonicznej itd.);
- interpretować informacje występujące we wzorze funkcji kwadratowej w postaci kanonicznej, ogólnej i postaci iloczynowej (o ile istnieje);
- sprawnie rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe oraz interpretować je graficznie, zapisywać rozwiązania odpowiednich nierówności w postaci sumy przedziałów;
- rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań i nierówności kwadratowych;
- wyznaczyć wartość najmniejszą i wartość największą funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym;
- rozwiązywać zadania (w tym również umieszczone w kontekście praktycznym) prowadzące do badania funkcji kwadratowej (zadania optymalizacyjne);
- rozwiązywać układy równań prowadzące do równań kwadratowych;
- analizować zjawiska z życia codziennego, opisane wzorem lub wykresem funkcji kwadratowej;
- opisać dane zjawisko za pomocą wzoru funkcji kwadratowej.

#### 4. Geometria płaska – okręgi i koła (13 godzin)

##### Cele edukacyjne

##### Uczeń:

- przypomni sobie pojęcie koła i okręgu;
- przypomni sobie położenie prostej względem okręgu;
- pozna twierdzenia dotyczące stycznej do okręgu;
- pozna wzajemne położenie dwóch okręgów;
- przypomni sobie definicję kąta środkowego w kole oraz pozna określenie kąta wpisanego w koło i kąta dopisanego do okręgu;
- pozna twierdzenia dotyczące kątów środkowych, wpisanych i dopisanych do okręgu.

##### Założone osiągnięcia ucznia

##### Uczeń potrafi:

- określać wzajemne położenie prostej i okręgu;
- określać wzajemne położenie dwóch okręgów;
- stosować twierdzenia dotyczące kątów wpisanych, środkowych i dopisanych;
- opisać okrąg na trójkącie, wpisać okrąg w trójkąt, wyznaczyć promień okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny i w trójkąt równoramienny; wyznaczyć promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym i na trójkącie równoramiennym, znając długości boków trójkąta;
- stosować twierdzenie o stycznej i siecznej.

#### 5. Trygonometria (17 godzin)

##### Cele edukacyjne

##### Uczeń:

- przypomni sobie określenie funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym;
- pozna określenie funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta (do  $360^\circ$ );

- pozna podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta;
- pozna wzory redukcyjne;
- pozna twierdzenie sinusów i jego zastosowanie;
- pozna twierdzenie cosinusów i jego zastosowanie.

#### Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- wyznaczyć wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta;
- korzystać z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora);
- obliczyć miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – korzystając z tablic lub kalkulatora – przybliżoną);
- rozwiązywać zadania geometryczne z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych;
- obliczyć pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych, jeśli jest znana jedna z nich;
- stosować wzory redukcyjne;
- stosować twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów do rozwiązywania trójkątów oraz w innych zadaniach geometrycznych.

### **6. Geometria płaska. Pole koła, pole trójkąta (13 godzin)**

#### Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna pojęcie pola figury;
- pozna własności pola;
- przypomni sobie wzór na pole koła;
- przypomni sobie wzór na pole wycinka koła;
- przypomni sobie stosowane wcześniej wzory na pole trójkąta (np.  $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$  czy wzór na pole trójkąta równobocznego);
- pozna nowe wzory na pole trójkąta (np.  $P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$ ,  $P = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$ ,  
 $P = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$ ,  $P = p \cdot r$ );
- pozna twierdzenie dotyczące pól figur podobnych;
- pozna zastosowanie pojęcia pola w dowodzeniu twierdzeń.

#### Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- zastosować twierdzenie o polach trójkątów podobnych w rozwiązywaniu zadań;
- zastosować wzór na pole koła i pole wycinka koła w rozwiązywaniu zadań;
- obliczyć pole figury, wykorzystując podział tej figury na rozłączne części;
- stosować poznane wzory do obliczania pól trójkątów;
- stosować wzory na pole trójkąta do wyznaczania wielkości występujących w tych wzorach (np. wysokości, długości promienia koła wpisanego w trójkąt, długości promienia okręgu opisanego na trójkącie).

## 7. Geometria analityczna (13 godzin)

### Cele edukacyjne ucznia

#### Uczeń:

- przypomni sobie podstawowe informacje o odcinku w układzie współrzędnych;
- przypomni sobie, jak oblicza się odległość punktów w układzie współrzędnych;
- pozna metodę wyznaczania współrzędnych środka odcinka;
- pozna równanie kierunkowe prostej;
- nauczy się zapisywać równanie prostej w postaci ogólnej;
- pozna warunki na równoległość i prostopadłość prostych danych równaniami kierunkowymi;
- pozna warunki na równoległość i prostopadłość prostych danych równaniami w postaci ogólnej;
- nauczy się wyznaczać odległość punktu od prostej i odległość między prostymi równoległymi;
- nauczy się rozwiązywać układ równań z dwiema niewiadomymi, z których jedno jest równaniem typu  $ax + by = e$ , a drugie równanie jest typu  $y = cx^2 + dx + f$ .

### Założone osiągnięcia ucznia

#### Uczeń potrafi:

- obliczyć odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;
- wyznaczyć współrzędne środka odcinka;
- wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej);
- zbadać równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych;
- wyznaczyć równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do danej prostej w postaci kierunkowej (lub ogólnej) i przechodzi przez dany punkt;
- obliczyć współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych; oraz współrzędne punktów wspólnych prostej i paraboli;
- stosować wzór na odległość punktu od prostej (w tym obliczać odległość między prostymi równoległymi);
- rozwiązywać zadania z geometrii analitycznej z wykorzystaniem poznanych wzorów oraz przekształceń geometrycznych, takich jak: symetria osiowa względem osi układu współrzędnych oraz symetria środkowa względem punktu  $O(0, 0)$ ;
- rozwiązywać zadania z geometrii analitycznej dotyczących własności trójkątów.

## 8. Wielomiany (26 godzin)

### Cele edukacyjne

#### Uczeń:

- pozna pojęcie wielomianu stopnia  $n$  ( $n \in \mathbf{N}_+$ ) jednej zmiennej rzeczywistej;
- nauczy się dodawać, odejmować i mnożyć wielomiany;
- pozna wzory skróconego mnożenia stopnia 3.;
- nauczy się rozkładać wielomiany na czynniki;
- pozna twierdzenie o równości wielomianów i nauczy się je stosować;
- pozna takie działania na wielomianach jak: dodawanie, odejmowanie i mnożenie;
- nauczy się dzielić wielomian przez wielomian;

- nauczy się dzielić wielomian przez dwumian za pomocą schematu Hornera;
- pozna pojęcie pierwiastka wielokrotnego wielomianu;
- pozna twierdzenie Bezouta i nauczy się je stosować;
- pozna twierdzenie o reszcie i nauczy się je stosować;
- pozna twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych i nauczy się je stosować;
- pozna metody rozkładania na czynniki (wyłączanie czynnika poza nawias, wzorów skróconego mnożenia, metoda grupowania wyrazów, metoda „prób”);
- nauczy się rozwiązywać równania wielomianowe;
- posiędzie umiejętność rozwiązywania zadań tekstowych prowadzących do równań wielomianowych;
- nauczy się rozwiązywać zadania dotyczące własności wielomianów w oparciu o poznane twierdzenia.

### Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- odróżnić wielomian od innego wyrażenia;
- dodać, odjąć i pomnożyć wielomiany;
- podzielić wielomiany (również metodą schematu Hornera);
- rozłożyć wielomian na czynniki, stosując poznane wzory skróconego mnożenia, grupowanie wyrazów oraz wyłączanie wspólnego czynnika poza nawias;
- rozwiązywać proste równania wielomianowe;
- stosować twierdzenie Bezouta w rozkładzie wielomianu na czynniki i w rozwiązywaniu równań;
- sprawnie rozwiązywać równania wielomianowe;
- rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do równań wielomianowych;
- rozwiązywać zadania dotyczące wielomianów, w których potrafi zastosować poznane definicje i twierdzenia;
- rozwiązywać zadania na dowodzenie dotyczące własności wielomianów.

## Klasa III

### 1. Ułamki algebraiczne. Równania wymierne (14 godzin)

Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna określenie ułamka algebraicznego;
- nauczy się skracać i rozszerzać ułamki algebraiczne;
- nauczy się dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić ułamki algebraiczne;
- nauczy się rozwiązywać proste równania wymierne prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych;
- nauczy się rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do prostych równań wymiernych;
- przypomni sobie własności funkcji  $y = \frac{a}{x}$ ;
- nauczy się rozwiązywać proste równania wymierne;
- nauczy się rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do prostych równań wymiernych;

- pozna funkcję homograficzną;
- nauczy się rysować wykresy funkcji homograficznych;
- nauczy się opisywać własności funkcji homograficznej na podstawie jej wykresu;
- nauczy się rozwiązywać zadania z wykorzystaniem własności funkcji homograficznej;
- będzie rozwiązywał zadania dotyczące własności funkcji wymiernych.

### Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- wyznaczyć dziedzinę ułamka algebraicznego;
- skracać, rozszerzać, dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić ułamki algebraiczne;
- rozwiązywać proste równania wymierne prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych;
- rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do prostych równań wymiernych;
- szkicować wykres funkcji  $y = \frac{a}{x}$ , dla danego  $a \neq 0$ ;
- omówić własności funkcji  $y = \frac{a}{x}$ , dla danego  $a \neq 0$ ;
- przekształcić wykres funkcji  $y = \frac{a}{x}$  (stosując poznane przekształcenia wykresów funkcji);
- korzystać ze wzoru i wykresu funkcji  $y = \frac{a}{x}$  do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.
- rozwiązywać proste równania wymierne;
- rysować wykresy funkcji homograficznych (w tym z wartością bezwzględną) i na ich podstawie opisywać własności funkcji;
- rozwiązywać zadania dotyczące własności funkcji homograficznej;
- rozwiązywać zadania tekstowe prowadzące do prostych równań wymiernych.

## 2. Ciągi (18 godzin)

### Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna definicję ciągu, w tym definicję rekurencyjną;
- pozna sposoby opisywania ciągów (wzór ogólny, wykres);
- pozna definicję ciągu monotonicznego i nauczy się badać monotoniczność ciągu;
- pozna definicję ciągu arytmetycznego;
- pozna własności ciągu arytmetycznego;
- nauczy się stosować w zadaniach poznane wzory dotyczące ciągu arytmetycznego ( $n$ -ty wyraz ciągu, suma  $n$  początkowych wyrazów tego ciągu, średnia arytmetyczna);
- pozna definicję ciągu geometrycznego;
- pozna własności ciągu geometrycznego;
- nauczy się stosować w zadaniach poznane wzory dotyczące ciągu geometrycznego ( $n$ -ty wyraz ciągu, suma  $n$  początkowych wyrazów ciągu, średnia geometryczna);
- pozna pojęcie procentu prostego i składanego;
- nauczy się rozwiązywać zadania dotyczące lokat i kredytów.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- określać ciąg wzorem ogólnym i wzorem rekurencyjnym;
- wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym;
- narysować wykres ciągu i podać własności tego ciągu na podstawie wykresu;
- zbadać monotoniczność ciągu;
- zbadać, czy dany ciąg jest ciągiem arytmetycznym;
- wyznaczyć ciąg arytmetyczny na podstawie wskazanych danych;
- wyznaczyć sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- rozwiązywać zadania tekstowe z wykorzystaniem własności ciągu arytmetycznego;
- zbadać, czy dany ciąg jest ciągiem geometrycznym;
- wyznaczyć ciąg geometryczny na podstawie wskazanych danych;
- wyznaczyć sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego;
- rozwiązywać zadania tekstowe z wykorzystaniem własności ciągu geometrycznego;
- rozwiązywać zadania stosując wzory na  $n$ -ty wyraz i sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego i ciągu geometrycznego, również umieszczone w kontekście praktycznym;
- stosować procent prosty i procent składany w zadaniach dotyczących oprocentowania lokat i kredytów.

**3. Geometria płaska – czworokąty (12 godzin)**

Cele edukacyjne

Uczeń:

- przypomni sobie podział czworokątów;
- pozna własności deltoidu;
- pozna twierdzenia opisujące własności trapezów (np. twierdzenie o odcinku łączącym środki ramion trapezu);
- przypomni sobie własności równoległoboków;
- przypomni sobie własności wielokątów (w tym wielokątów foremnych);
- utrwali pojęcie podobieństwa i jego własności;
- przypomni sobie, co to są czworokąty podobne.

Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- posługiwać się własnościami czworokątów w rozwiązywaniu zadań;
- stosować poznane twierdzenia w rozwiązywaniu zadań dotyczących wielokątów;
- stosować funkcje trygonometryczne w rozwiązywaniu zadań geometrycznych dotyczących czworokątów;
- stosować własności podobieństwa figur w rozwiązywaniu zadań, w tym umieszczonych w kontekście praktycznym.



#### 4. Geometria płaska – pole czworokąta (15 godzin)

##### Cele edukacyjne

##### Uczeń:

- przypomni sobie wzory na pola czworokątów (kwadratu, prostokąta, równoległoboku, rombu, trapezu);
- pozna nowe wzory na pole czworokąta;
- pozna twierdzenie dotyczące figur podobnych.

##### Założone osiągnięcia ucznia

##### Uczeń potrafi:

- stosować poznane wzory do obliczania pól wielokątów;
- stosować twierdzenie dotyczące pól figur podobnych, w tym również umieszczonych w kontekście praktycznym (np. dotyczących planu, mapy, skali mapy);
- rozwiązywać zadania z zastosowaniem pól figur płaskich, również z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych.

#### 5. Geometria analityczna (19 godzin)

##### Cele edukacyjne

##### Uczeń:

- przypomni sobie, jak oblicza się odległość punktów w układzie współrzędnych;
- przypomni sobie, jak wyznacza się współrzędne środka odcinka;
- przypomni sobie informacje o równaniu kierunkowym prostej;
- przypomni sobie, jak zapisywać równanie prostej w postaci ogólnej;
- przypomni sobie warunki na równoległość i prostopadłość prostych danych równaniami kierunkowymi;
- nauczy się obliczać pole trójkąta, korzystając z współrzędnych wierzchołków trójkąta;
- pozna równanie okręgu;
- nauczy się badać wzajemne położenie prostej i okręgu;
- nauczy się przekształcać równanie okręgu do postaci kanonicznej;
- nauczy się wyznaczać współrzędne środka i promień okręgu;
- pozna przekształcenia w układzie współrzędnych, takie jak: symetria osiowa, symetria środkowa, przesunięcie równoległe.

##### Założone osiągnięcia ucznia

##### Uczeń potrafi:

- obliczyć odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych;
- wyznaczyć współrzędne środka odcinka;
- wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej);
- zbadać równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych i ogólnych;
- wyznaczyć równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do danej prostej w postaci kierunkowej (lub ogólnej) i przechodzi przez dany punkt;
- obliczyć współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych;

- stosować wzór na odległość punktu od prostej (również obliczać odległość między prostymi równoległymi);
- odróżnić równanie okręgu od innych równań;
- przekształcać równanie okręgu do postaci kanonicznej i odczytywać współrzędne środka i promień okręgu;
- wyznaczać równanie okręgu o zadanych własnościach;
- znaleźć współrzędne punktów wspólnych dla prostej i okręgu;
- wyznaczyć równanie stycznej do okręgu;
- stosować przekształcenia geometryczne w rozwiązywaniu zadań z geometrii analitycznej;
- rozwiązywać zadania dotyczące trójkątów, czworokątów oraz okręgów z zastosowaniem poznanej wiedzy.

## 6. Elementy kombinatoryki (11 godzin)

### Cele edukacyjne

#### Uczeń:

- nauczy się zliczać obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosując regułę mnożenia i regułę dodawania.

### Założone osiągnięcia ucznia

#### Uczeń potrafi:

- zliczać obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych (posługuje się grafami w postaci drzewa, stosuje regułę mnożenia oraz regułę dodawania).

## Klasa IV

### 1. Funkcja wykładnicza. Funkcja logarytmiczna (16 godzin)

#### Cele edukacyjne

#### Uczeń:

- przypomni sobie własności działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym;
- będzie doskonalił umiejętności wykonywania działań na potęgach;
- przypomni sobie pojęcie funkcji wykładniczej;
- przypomni sobie własności funkcji wykładniczej;
- nauczy się szkicować wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw;
- nauczy się rozwiązywać proste równania i nierówności wykładnicze;
- przypomni sobie pojęcie logarytmu;
- przypomni sobie własności logarytmów i ich zastosowanie w rozwiązywaniu zadań;
- nauczy się rozwiązywać proste równania logarytmiczne, do rozwiązania których będzie stosował definicję logarytmu.
- przypomni sobie pojęcie funkcji logarytmicznej;
- przypomni sobie własności funkcji logarytmicznej;
- będzie doskonalił umiejętność przekształcania wykresów funkcji logarytmicznych;
- nauczy się wyznaczać dziedzinę funkcji logarytmicznej;
- nauczy się rozwiązywać równania logarytmiczne;

- nauczy się analizować zjawiska z życia codziennego, które można opisać za pomocą funkcji wykładniczej;
- nauczy się dostrzegać zastosowanie logarytmów w sytuacjach z życia (lokaty bankowe, rozpad substancji promieniotwórczych itp.).

### Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- sprawnie wykonywać działania na potęgach o wykładniku rzeczywistym;
- stosować własności działań na potęgach w rozwiązywaniu zadań;
- odróżnić funkcję wykładniczą od innych funkcji;
- sporządzać wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw;
- przekształcać wykresy funkcji wykładniczych;
- opisywać własności funkcji wykładniczych na podstawie ich wykresów;
- rozwiązywać proste równania i nierówności wykładnicze;
- posługiwać się funkcjami wykładniczymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, biologicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym;
- obliczać logarytm;
- stosować własności logarytmów w rozwiązywaniu zadań;
- rozwiązywać proste równania logarytmiczne, korzystając z definicji logarytmu;
- odróżnić funkcję logarytmiczną od innych funkcji;
- rysować i przekształcać wykresy funkcji logarytmicznych;
- opisywać własności funkcji logarytmicznych na podstawie ich wykresów;
- rozwiązywać równania logarytmiczne oraz interpretować je graficznie;
- posługiwać się funkcjami logarytmicznymi do opisu zjawisk fizycznych, chemicznych, a także w zagadnieniach osadzonych w kontekście praktycznym.

## **2. Rachunek prawdopodobieństwa. Elementy statystyki opisowej (23 godziny)**

### Cele edukacyjne

Uczeń:

- przypomni sobie jak zliczać obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosując regułę mnożenia i regułę dodawania;
- pozna takie pojęcia, jak: doświadczenie losowe, zdarzenie elementarne, zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego, zdarzenie, zdarzenie pewne, zdarzenie niemożliwe;
- nauczy się określać zbiór zdarzeń elementarnych danego doświadczenia losowego, określać jego moc oraz określać zdarzenia elementarne sprzyjające danemu zdarzeniu;
- nauczy się znajdować sumę zdarzeń, różnicę zdarzeń, iloczyn zdarzeń oraz zdarzenie przeciwne do danego zdarzenia;
- pozna twierdzenie o prawdopodobieństwie klasycznym;
- pozna własności prawdopodobieństwa i nauczy się je stosować w rozwiązywaniu zadań;
- nauczy się rozwiązywać zadania z zastosowaniem twierdzenia o prawdopodobieństwie klasycznym;
- pozna pojęcie zmiennej losowej, rozkładu zmiennej losowej oraz wartości oczekiwanej zmiennej losowej;

- dowie się, na czym polega klasyfikacja danych statystycznych;
- nauczy się obliczać średnią z próby, medianę z próby i odchylenie standardowe z próby;
- nauczy się interpretować wymieniane wyżej parametry statystyczne.

#### Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- zliczać obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych (posługuje się grafami w postaci drzewa, stosuje regułę mnożenia oraz regułę dodawania);
- określić zbiór (skończony) zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego i obliczyć jego moc;
- wyznaczyć liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających danemu zdarzeniu losowemu;
- obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń losowych na podstawie twierdzenia o prawdopodobieństwie klasycznym;
- stosować własności prawdopodobieństwa w rozwiązywaniu zadań;
- wykorzystać sumę, iloczyn i różnicę zdarzeń do obliczania prawdopodobieństwa.
- zastosować pojęcie zmiennej losowej, rozkładu zmiennej losowej oraz wartości oczekiwanej zmiennej losowej;
- obliczać średnią arytmetyczną, średnią ważoną, medianę, odchylenie standardowe z próby;
- interpretować wymieniane wyżej parametry statystyczne;
- odczytywać i interpretować dane empiryczne z tabel, diagramów i wykresów;
- przedstawiać dane empiryczne w postaci tabel, diagramów i wykresów;
- przeprowadzać analizę ilościową przedstawionych danych;
- porównywać i określać zależności między odczytanymi danymi.

### **3. Geometria przestrzenna - wielościany (22 godziny)**

Cele edukacyjne

Uczeń:

- pozna wzajemne położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni;
- nauczy się rysować figury w rzucie równoległym na płaszczyznę;
- pozna wzajemne położenie prostej i płaszczyzny;
- pozna twierdzenie o trzech prostych prostopadłych;
- nauczy się wyznaczać kąt między prostą a płaszczyzną;
- pozna pojęcie kąta dwuściennego oraz pojęcie kąta liniowego;
- przypomni sobie i uzupełni wiadomości o graniastostupach;
- przypomni sobie i uzupełni wiadomości o ostrostupach;
- pozna przekroje prostopadłościanów.

#### Założone osiągnięcia ucznia

Uczeń potrafi:

- badać wzajemne położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni;
- stosować twierdzenie o trzech prostych prostopadłych;
- poprawnie narysować graniastostup, ostrostup lub bryłę obrotową w rzucie;

- podać własności figur przestrzennych, takich jak graniastosłupy, ostrosłupy czy bryły obrotowe;
- rozpoznać w graniastosłupach i ostrosłupach kąty między odcinkami (np. krawędziami i przekątnymi itp.) oraz obliczyć miary tych kątów;
- rozpoznać w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między odcinkami i płaszczyznami (między krawędziami i ścianami, przekątnymi i ścianami) oraz obliczyć miary tych kątów;
- rozpoznać w graniastosłupach i ostrosłupach kąt między ścianami;
- stosować wiedzę z trygonometrii do obliczania długości odcinków oraz miar kątów;
- rysować siatki figur przestrzennych;
- określić, jaką figurą jest dany przekrój prostopadłościanu płaszczyzną (w prostych przypadkach obliczyć pole przekroju).

#### **4. Geometria przestrzenna – bryły obrotowe (14 godzin)**

##### Cele edukacyjne

##### Uczeń:

- pozna podstawowe wiadomości o bryłach obrotowych;
- pozna własności walca, stożka i kuli;
- pozna pojęcie objętości i pola powierzchni walce, stożka i kuli.

##### Założone osiągnięcia ucznia

##### Uczeń potrafi:

- rozpoznać w walcach i stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (np. kąt rozwarcia stożka, kąt między tworzącą a podstawą) oraz obliczyć miary tych kątów;
- wyznaczać pola i objętości brył obrotowych.

## V. Procedury osiągnięcia celów kształcenia i procedury oceniania osiągnięć uczniów

Nikogo nie trzeba przekonywać, że rozwijanie umiejętności matematycznych wpływa na rozwój intelektualny człowieka. Matematyka uczy logicznego myślenia i wnioskowania. Na lekcjach matematyki uczeń nabywa umiejętności precyzyjnego wystawiania się, co pomaga mu w komunikowaniu się z innymi.

Realizacja naszego programu w oparciu o przygotowane przez nas podręczniki i zbiory zadań umożliwi rozwiązywanie ciekawych problemów, zarówno z algebry, jak i z geometrii. Zadania rozwiązywane na każdym etapie edukacji pozwolą na zdobycie umiejętności w zakresie: interpretowania tekstu matematycznego, używania prostych obiektów matematycznych, prostego modelowania matematycznego, stosowania strategii wynikającej z treści zadania, jak również prowadzenia prostych rozumowań, składających się z niewielkiej liczby kroków. Przedstawienie w podręcznikach różnych sposobów rozwiązania zadań uczy kreatywności w poszukiwaniu przez ucznia własnej metody rozwiązania problemu. Przykłady zaczerpnięte z życia codziennego pozwolą uczniowi dostrzec prawdziwości matematyczne w otaczającym go świecie i wpłyną na rozwijanie praktycznych umiejętności. We współczesnym świecie niezbędna jest umiejętność posługiwania się różnymi tabelami, wykresami i diagramami. Kształtowanie tych umiejętności umożliwi realizacja naszego programu w każdym dziale matematyki, w szczególności przy omawianiu takiej tematyki, jak zbiory, elementy statystyki, czy własności funkcji. Na tych lekcjach uczeń nabędzie umiejętność zdobywania, porządkowania, analizowania i przetwarzania informacji. Opanuje umiejętność oceny ilościowej i opisu zjawisk z różnych dziedzin życia. Lekcje rachunku prawdopodobieństwa ułatwią uczniowi dokonanie wyboru strategii w przypadkach doświadczeń losowych (np. gry losowe).

Bardzo ważne jest kształtowanie postaw młodego pokolenia. Te cele należy kształtować na każdej lekcji matematyki. Trzeba wymagać od uczniów samodzielności w rozwiązywaniu problemów, piętnować nieuczciwość, wyrażającą się w podpowiadaniu czy w ściąganiu. Każdy uczeń powinien czuć się odpowiedzialny za powierzone mu zadania. Jednocześnie powinien uczyć się współpracy z rówieśnikami poprzez pomoc koleżeńską, wykonywanie wspólnych projektów itp.

Na lekcjach matematyki mamy doskonałe warunki do tego, by uczyć kultury dyskusji. Bardzo często uczniowie przedstawiają różne metody rozwiązania tego samego problemu, a naszym obowiązkiem jest wysłuchać wszystkich propozycji i wspólnie z zespołem podjąć decyzję, w jaki sposób dany problem ostatecznie rozwiązać. Zwracamy też uwagę na język matematyczny, precyzyjne formułowanie myśli, logiczną konstrukcję wypowiedzi. Kształcimy w ten sposób umiejętność komunikacji uczeń-nauczyciel, uczeń-uczeń.

Osiągnięcie założonych celów edukacyjnych i wychowawczych jest możliwe dzięki stosowaniu na lekcjach matematyki różnorodnych metod nauczania i odpowiedniego doboru form organizacyjnych lekcji. Ta różnorodność ma nie tylko uatrakcyjnić przedmiot, ale także zaktywizować uczniów w procesie uczenia się, zachęcić do rozwiązywania różnorodnych problemów, spowodować kształtowanie odpowiednich postaw.

## 1. Metody nauczania

Wśród najczęściej stosowanych metod pracy na uwagę zasługują:

### a) Metoda podająca

- Wykład – w tej metodzie nauczania główną rolę odgrywa nauczyciel. Dobrze przygotowanie merytoryczne prowadzącego zajęcia jest podstawą rzetelnego przekazania wiedzy uczniom. To on formułuje problem, analizuje go, wskazuje drogi i sposoby rozwiązania. Uczniowie sporządzają notatki, zapamiętują fakty, zdobywają wiedzę i umiejętności poprzez naśladownictwo. Ta metoda jest ważna z punktu widzenia dalszej nauki. Na uczelniach jest stosowana powszechnie, zatem uczeń powinien być przygotowany do korzystania z wykładu. W szkole średniej nie powinna być jednak stosowana zbyt często.

### b) Metody aktywizujące uczniów

- Pogadanka, dyskusja – w tej metodzie nauczyciel kieruje rozmową, umiejętnie prowadzi dyskusję i porządkuje jej przebieg. Zadaje pytania, naprowadza na prawidłowe odpowiedzi, rozjaśnia wątpliwości, rozstrzyga spory. Uczniowie dyskutują, formułują spostrzeżenia, wymieniają się doświadczeniami, argumentują, spierają się, wyciągają wnioski.
- Metoda problemowa – w tej metodzie nauczyciel stawia przed uczniami pewien problem matematyczny (zadanie problemowe), który uczniowie rozwiązują samodzielnie. Uczniowie zmuszeni są do dużego wysiłku intelektualnego. Analizują problem, formułują hipotezy, weryfikują je, w razie potrzeby wyjaśniają wątpliwości z nauczycielem, budują model rozwiązania problemu, dokonują korekt, podsumowują swoje spostrzeżenia i wnioski, sprawdzają obliczenia, formułują odpowiedź. Ta metoda kształci umiejętność rozwiązywania problemów, wzbogaca wiedzę uczniów i aktywizuje ich postawy w procesie kształcenia.
- Praca z tekstem matematycznym:
  - 1) *Praca z podręcznikiem* – polega na samodzielnym przeczytaniu fragmentu podręcznika, zapoznaniu się z definicjami i twierdzeniami oraz ze sposobami rozwiązywania zadań. Kształci umiejętność czytania ze zrozumieniem tekstu matematycznego, analizowania definicji i twierdzeń oraz śledzenia algorytmów rozwiązania niektórych zadań.
  - 2) *Praca z wykorzystaniem encyklopedii, słowników, czasopism popularnonaukowych, roczników statystycznych itp.* – przyzwyczajają uczniów do zbierania informacji z różnych źródeł, analizowania ich i przetwarzania, a także uświadomienia sobie, jaką rolę pełni matematyka w otaczającej ich rzeczywistości.
  - 3) *Praca z komputerem* – odpowiednie stosowanie technologii informacyjnej może istotnie zwiększyć efekty kształcenia matematycznego. Rekomendujemy używanie GeoGebry – darmowego oprogramowania wspomagającego nauczanie matematyki. GeoGebry można zastosować we wszystkich działach występujących w nauczaniu matematyki na poziomie szkoły średniej. Na uwagę zasługuje na przykład zastosowanie GeoGebry do: badania własności funkcji (w tym funkcji liniowej i funkcji kwadratowej – dwóch głównych rodzajów funkcji poznawanych w kształceniu podstawowym), badania własności figur płaskich („odkrywanie” twierdzeń), rozwiązywania zadań z geometrii przestrzennej. Zastosowanie GeoGebry odbywać się może na kilku poziomach: a) prezentacja – za pomocą komputera i rzutnika nauczyciel prezentuje uczniom przygotowany wcześniej (statyczny) pokaz; b) prezentacja interaktywna – nauczyciel prezentuje uczniom dynamiczny pokaz (interaktywne

aplety); c) prezentacja interaktywna z udziałem uczniów – nauczyciel prezentuje uczniom dynamiczny pokaz (interaktywne aplety) na tablicy (multimedialnej), w prezentacji biorą też udział wybrani uczniowie; d) zajęcia w pracowni komputerowej – każdy uczeń pracuje indywidualnie przy komputerze. Warto też skorzystać z możliwości środowiska Wolfram Alpha.

- **Rozwiązywanie ciągu zadań** – metoda ta polega na rozwiązywaniu przez uczniów zestawu zadań (ze zbioru zadań bądź przygotowanych przez nauczyciela). Ważne jest, aby zadania ułożone były w takiej kolejności, żeby rozwiązanie każdego następnego zadania pogłębiało wiedzę i umiejętności ucznia. Dobrze byłoby, aby wśród zadań pojawiły się też takie, które mają ciekawą nietypową treść lub zaskakujące rozwiązanie. Takiego rodzaju zadania i ćwiczenia w naturalny sposób pobudzają ciekawość i aktywność umysłową uczniów.

## 2. Formy pracy

Z wyborem metod nauczania ściśle wiąże się odpowiedni dobór form organizacyjnych lekcji. Wśród nich można wyróżnić następujące:

– **Praca z całą klasą** – polega na zaangażowaniu całej społeczności klasowej w rozwiązywanie problemów sformułowanych przez nauczyciela.

- 1) Nauczyciel realizuje ze wszystkimi uczniami te same treści (np. uczniowie rozwiązują te same zadania, analizują ten sam problem matematyczny, dyskutują na ten sam temat, nauczyciel prowadzi wykład). Ta forma pracy sprzyja nawiązywaniu więzi uczniowskich.
- 2) Wzajemne odpytywanie się (uczeń zadaje pytanie i wskazuje tego, który ma na nie odpowiedzieć; uczeń, który odpowiedział na postawione pytanie, zadaje swoje pytanie następnemu uczniowi itd.). Taka metoda pracy angażuje wszystkich uczniów. Pozwala na sprawne powtórzenie materiału. Uczniowie kształcą umiejętność porządkowania informacji, formułowania i zadawania pytań.

– **Praca w grupach** – polega na podziale klasy na kilkusobowe zespoły i przydzieleniu im problemu do rozwiązania. Taka forma pracy przebiega w różny sposób, w zależności od wyboru metody pracy, np.:

- 3) Każda grupa dostaje do rozwiązania zadanie lub zadania; wszyscy członkowie grupy uczestniczą w rozwiązywaniu problemu, dzieląc się własnymi spostrzeżeniami, umiejętnościami i wiedzą; nad pracą grupy pieczę sprawuje wcześniej wybrany lider grupy. Sprawozdawca grupy referuje rozwiązanie problemu przed całą klasą.
- 4) Metoda układanki „puzzle” – każdy członek grupy otrzymuje część informacji potrzebnej do wykonania zadania grupowego; poszczególni członkowie grupy są odpowiedzialni za przygotowanie swojej porcji informacji, przekazanie jej kolegom i przyswojenie informacji prezentowanych przez nich.
- 5) Metoda „drzewa decyzyjnego” – nauczyciel określa problem będący przedmiotem analizy; dzieli uczniów na grupy. Uczniowie wybierają różne możliwości rozwiązania zadania, wypisują zalety i wady każdej z metod rozwiązania, oceniają je z punktu widzenia wartości i celów, podejmują grupową decyzję o wyborze metody rozwiązania problemu.

Praca w grupach uczy organizacji pracy, podziału obowiązków pomiędzy członków grupy, odpowiedzialności za powierzone zadania. Uczy komunikacji między członkami grupy, zasad współpracy partnerskiej. Ma ogromne walory kształcące i wychowawcze.



– **Praca indywidualna** – każdy uczeń pracuje samodzielnie, pod kierunkiem nauczyciela (jeśli praca odbywa się na lekcji) lub samodzielnie (jeśli praca odbywa się w domu). Praca indywidualna pozwala uczniowi na samodzielne poszukiwanie odpowiedzi na postawione pytania, zmusza do własnych przemyśleń, zastanowienia się nad problemem i sposobem jego rozwiązania, utrwaleniem już zdobytej wiedzy, a także nad kształceniem umiejętności uczenia się. Uczeń pracuje we właściwym dla siebie tempie. Praca indywidualna wyrabia też nawyk sumiennego wykonania powierzonych zadań, odpowiedzialności za siebie, za swoją wiedzę i umiejętności.

### 3. Metody kontroli i oceny

Kontrolowanie i ocenianie uczniów powinno być spójne z tym, co było przedmiotem nauczania. Przedmiotem oceny nie może być relacja między wiedzą ucznia i nauczyciela, lecz postęp ucznia w procesie kształcenia. Głównymi obszarami oceniania powinny być: wiedza zdobyta przez ucznia, umiejętności pozwalające uczniowi na gromadzenie i pogłębianie wiedzy, umiejętności społeczne i komunikacyjne, a także postawa młodego człowieka, wyrażająca się w dążeniu do samorealizacji. Najłatwiej ocenić wiedzę, jaką posiada uczeń, trudniej – pozostałe obszary. Aby móc to uczynić, należy stosować aktywne metody nauczania. Tak ważną umiejętność, jak komunikacja, która wyraża się w wypowiedzaniu, argumentowaniu, najlepiej można ocenić podczas dyskusji, pracy w grupach czy autoprezentacji. Z kolei umiejętności społeczne ujawnia współpraca w mniejszych zespołach, prace projektowe oraz zadania indywidualne, podejmowane przez pojedynczych uczniów. Ocenie podlega wówczas zaangażowanie w realizację zadań, odpowiedzialność za pracę, a także umiejętność współpracy między uczniami. Jest ważne, aby nauczyciel miał świadomość, że ocenianie nie służy tylko gromadzeniu ocen. Ma sprawdzać postępy ucznia, uświadamiać mu braki, w porę wykrywać kłopoty i trudności w nabywaniu różnych umiejętności, ale także zachęcać go do dalszej pracy i pokonywania trudności. Regularność oceniania zachęca uczniów do systematycznej pracy. Ważne jest, abyśmy dostrzegali nie tylko zaangażowanie uczniów podczas lekcji, ale także premiowali wszelkie prace domowe. Jest niezwykle ważne, aby system oceniania był jasny i czytelny dla uczniów i ich rodziców. Aby wnikliwie ocenić edukacyjne osiągnięcia ucznia, należy posługiwać się różnorodnymi środkami i metodami oceniania, takimi jak: sprawdziany pisemne (prace klasowe, testy, kartkówki), odpowiedzi ustne (referaty, odpowiedzi z kilku ostatnich zajęć, prezentacja rozwiązania zadania, dyskusja nad rozwiązaniem problemu itp.), praca w grupach, prace domowe oraz aktywność na zajęciach. Poszczególnym formom oceniania można nadać różną wagę. Egzamin maturalny jest egzaminem pisemnym, więc dużą wagę należy przywiązywać do prac pisemnych. Proponujemy następujący system oceniania:

– Prace klasowe oraz testy oceniane są w skali 1–6, wg skali procentowej.

niedostateczny	0%	do 39%
dopuszczający	40%	do 49%
dostateczny	50%	do 74%
dobry	75%	do 90%
bardzo dobry	91%	do 100%
celujący	ocena bardzo dobry + zadanie dodatkowe.	

W szczególnych przypadkach (np. słaba lub bardzo mocna klasa) można proponowaną skalę modyfikować zgodnie z zasadami określonymi w statucie szkoły, zmieniając odpowiednio przedziały procentowe.

– Kartkówki: proponujemy, aby maksymalna liczba punktów, jaką może otrzymać uczeń, była wielokrotnością liczby 6, najlepiej 6 pkt lub 12 pkt. Wówczas ocenę z kartkówki można obliczyć według wzoru:  $ocena = \frac{l_p}{k} - 1$ , gdzie  $l_p$  to liczba punktów uzyskanych przez ucznia,  $k = 1$ , dla kartkówki 6-punktowej lub  $k = 2$ , dla kartkówki 12-punktowej (oczywiście, jeśli wartość oceny otrzymanej ze wzoru jest mniejsza niż 1, uczeń otrzymuje ocenę niedostateczną).

– Praca w grupach: tę formę pracy jest dość trudno ocenić. Zdarza się bowiem, że nie wszystkie osoby w grupie wkładają odpowiedni wysiłek w wykonanie zadania, niektóre w ogóle nie pracują, oczekując na wyniki pracy pozostałych. Osoby nieaktywne nie korzystają z lekcji. Jeśli praca w grupach ma charakter ćwiczeniowy (grupa otrzymuje jedno lub kilka zadań do rozwiązania), to proponujemy następujący system ocenienia jej pracy: nauczyciel informuje grupy, że ocena ich pracy to średnia dwóch ocen – pracy pisemnej i odpowiedzi ustnej. Każda grupa ma sekretarza, który na koniec zajęć przedstawia w formie pisemnej efekty pracy grupy, nauczyciel sprawdza i ocenia pracę pisemną. Następnie wybiera z każdej grupy jedną osobę, która na tablicy rozwiązuje zadanie wskazane przez nauczyciela. Odpowiedź ucznia podlega ocenie. Każdy członek danej grupy otrzymuje ocenę, która jest średnią ocen z pracy pisemnej i odpowiedzi ustnej ucznia danej grupy. Taki system oceny pracy grupowej powoduje, że wszyscy członkowie grupy czują się współodpowiedzialni za powierzone zadanie. Chętnie pomagają sobie nawzajem, wyjaśniają wątpliwości. Chcą, aby każdy uczeń z grupy był gotowy do prezentacji problemu.

#### 4. Środki dydaktyczne

- a) Wykonywanie siatek i modeli figur przestrzennych – w ten sposób rozwijana jest wyobraźnia przestrzenna uczniów.
- b) Wykorzystanie telewizji edukacyjnej, filmów edukacyjnych, komputerów – jest elementem edukacji medialnej; daje możliwość prezentowania różnych modeli matematycznych; zwiększa atrakcyjność prezentowanego materiału.
- c) Analizowanie informacji z prasy, np.: danych giełdowych, kursu walut, zmian cen różnych towarów na rynku itp.
- d) Wykorzystanie środków mnemotechnicznych.

Osiąganie zamierzonych celów kształcenia może odbywać się również przez uczestnictwo uczniów w kołach matematycznych, kołach interdyscyplinarnych, a także w konkursach matematycznych i w olimpiadzie matematycznej.